Midtoets van Lineaire Algebra, 31 januari 2003, 14-16 uur

Schrijf je naam + student nummer + werkcollegedocent op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht. Alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet.

Programmeerbare rekenmachines zijn niet toegestaan.

Opgave 1:
Gegeven is de matrix en vector:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ p \end{pmatrix}$$

a) Reken $\det(A)$ uit. Schrijf ook de tussenstappen op.
b) Vind de rang van A.
c) Vind voor elke $p \in \mathbb{R}$ de oplossingsverzameling van $Ax = b$.

Opgave 2:
a) Schrijf de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

als een vergelijking met differentiaal operatoren.
b) Vind de volledige oplossing van de vergelijking.
c) Vind de oplossing van $y''' + y'' - y' - y = 3e^{2t}$.

Opgave 3:
Neem $V = P_2(\mathbb{R})$ met standaard basis $\beta = \{1, x, x^2\}$. De lineaire afbeelding $T : V \to V$ is gegeven door $(Tp)(x) = p(x+2)$
a) Geef de matrixvoorstelling $A := [T]_\beta$.
b) Is T een isomorfisme?
c) Reken uit A^{23}.

3

1 a $\det\begin{pmatrix}3&-1&1\\-7&2&3\\-1&0&5\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}3&-1&1\\-16&5&0\\-1&0&5\end{pmatrix}_{r_2\to r_2-3r_1}=\det\begin{pmatrix}3\frac{1}{5}&-1&0\\-16&5&0\\-1&0&5\end{pmatrix}_{r_1\to r_1-\frac{1}{5}r_3}=$

$\det\begin{pmatrix}0&0&0\\-16&5&0\\-1&0&5\end{pmatrix}_{r_1\to r_1+\frac{1}{5}r_2}=0$

3

b $\text{rang}\begin{pmatrix}3&-1&1\\-7&2&3\\-1&0&5\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\-16&5&0\\-1&0&5\end{pmatrix}_{\text{(zie 1a)}}=\text{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&0\\-1&0&5\end{pmatrix}_{r_2\to r_2-16r_3}=\text{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&0\\-1&0&0\end{pmatrix}_{k_3\to k_3+5k_1}=$

$\text{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}_{\substack{k_2\to\frac{1}{5}k_2\\k_1\to -k_1}}=\text{rang}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{r_1\leftrightarrow r_3}=2$

3

c $\begin{pmatrix}3&-1&1\\-7&2&3\\-1&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\p\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&1&0\\-7&2&3&5\\-1&0&5&p\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2\to r_2-3r_1\\r_1\to r_1-\frac{1}{5}r_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}3\frac{1}{5}&-1&0&-\frac{1}{5}p\\-16&5&0&5\\-1&0&5&p\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\to r_1+\frac{1}{5}r_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&1-\frac{1}{5}p\\-16&5&0&5\\-1&0&5&p\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\to r_2-16r_3]{}$

$-16\cdot 5$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&1-\frac{1}{5}p\\0&5&\cancel{0}&5-16p\\-1&0&5&p\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&5&p\\0&5&0&5-16p\\0&0&0&1-\frac{1}{5}p\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_1\to -r_1\\r_2\to\frac{1}{5}r_2}]{}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&-p\\0&1&0&1-3\frac{1}{5}p\\0&0&0&1-\frac{1}{5}p\end{array}\right)\end{array}$

$\boxed{p=5}$

$x_1-5x_3=-p$

$x_2=1-3\frac{1}{5}p$

$0=1-\frac{1}{5}p\to\boxed{p=5}\to x_2=-15$

$\to x_1=-5+5x_3$

$\{(x_1,x_2,x_3): x_1-5x_3=-p \wedge x_2=1-3\frac{1}{5}p\}$ is de opl. verz.

+1

2a $D^3y+D^2y-\cancel{Dy}-y=0$

b Derdegraads → driedimensionale oplossing.

$y_h=t^2e^{at}+te^{bt}+e^{ct}$

$y_h'=2te^{at}+t^2ae^{at}+e^{bt}+tbe^{bt}+ce^{ct}$

$y_h''=2e^{at}+2tae^{at}+2tae^{at}+t^2a^2e^{at}+be^{bt}+be^{bt}+tb^2e^{bt}+c^2e^{ct}$

20.7.

$y_1 = e^{ct}$ $\quad y_1' = ce^{ct}$ $\quad y_1'' = c^2 e^{ct}$ $\quad y_1''' = c^3 e^{ct}$

$c^3 e^{ct} + c^2 e^{ct} - ce^{ct} - e^{ct} = 0$

$c^3 + c^2 - c - 1 = 0$

$(c-1)(c^2+2c+1) = 0$

$(c-1)(c+1)(c+1) = 0$

$c = 1 \quad \vee \quad c = -1$

$y_1 = e^{t} + e^{-t}$ twee dimensies, dus moet er nog een opl. bestaan

~~$y_2 = t e^{dt}$~~ helaas geen tijd om die te vinden..

$\cancel{y_2 = e^{dt} + dt e^{dt}}$ $\quad y_2 = te^{kt}$ werkt niet

$\cancel{y_2' = de^{dt} + de^{dt} + d^2te^{dt} = 2de^{dt} + d^2te^{dt}}$

$\cancel{y_2'' = 2d^2e^{dt} + d^2e^{dt} + 2d^2e^{dt} + d^2e^{dt} + d^3te^{dt} = 3d^2e^{dt} + d^3te^{dt}}$

$\cancel{3d^2e^{dt} + d^3te^{dt} + 2de^{dt} + d^2te^{dt} - e^{dt} - dte^{dt} - te^{dt} = 0}$

$\cancel{3d^2 + d^3t + 2d + d^2t - 1 - dt - t = 0}$

f2

$y_h = ce^{t} + de^{-t}$ (plus b × de derde oplossing)

2c $y_p = ae^{2t}$

$y_p' = 2ae^{2t}$

$y_p'' = 4ae^{2t}$

$y_p''' = 8ae^{2t}$

$(8a + 4a - 2a - a)e^{2t} = 3e^{2t}$

$9a = 3$

$a = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}e^{2t} + ce^{t} + de^{-t}$ (plus b × de derde oplossing)

x4

3a $T\beta_1(x) = 1 = \beta_1$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$T\beta_2(x) = x + 2 = 2\beta_1 + \beta_2$ $\quad \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$T\beta_3(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 4\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3$ $\quad \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$

3

$A = [T]_\beta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b Ja, want T^{-1} bestaat en is $(T^{-1}p)(x) = p(x-2)$

De matrixvoorstelling hiervan is volgens het procédé bij 3a

3

$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Vermenigvuldigd met $[T]_\beta$ levert deze op:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$

Deze T^{-1} is dus inderdaad de inverse van T.

3c $A^{23} = A^{22} \cdot A = (A^2)^{11} \cdot A = I^{11} \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0

$A^2 \neq I$